近年のアクチュアリー会資格試験「数学」の問題から

藤田岳彦
◉中央大学理工学部

本稿では，近年のアクチュアリ試験「数学」の問題から，面白そうな問題をいくつか取り上げて解説する．まず，平成21年度の問題2を取り上げる．

◉──平成21年度　問題2

表の出る確率が $p\,(0<p<1)$ である硬貨を無限に投げ続けるとき，初めて n 回続けて表が出るまでに投げた回数を表す確率変数を X_n とする．以下を求めよ．

（1）　$n=2$ のケースを考える

硬貨を k 回続けて投げるとき，2回続けては表が出ない確率 q_k は，初めて2回続けて表が出るまでに投げた回数を表す確率変数 X_2 を用いて，$\boxed{①}$ と表すことができる．

さて，q_k は $k\geqq 2$ のとき，次の2つの排反な事象に関する確率の和として捉えることができる．すなわち，

事象Ⅰ：1回目に $\boxed{②}$ が出て，残りの $k-1$ 回のうちに2回続けては表が出ないという事象．

事象Ⅱ：1回目に $\boxed{③}$，2回目に $\boxed{④}$ が出て，残りの $k-2$ 回のうちに2回続けては表が出ないという事象．

したがって，q_k に関する漸化式

$$q_k=\boxed{⑤}\,q_{k-1}+\boxed{⑥}\,q_{k-2}\qquad(k\geqq 2)$$

が成立する．ここで，$p=\dfrac{2}{3}$ のとき，$q_k=\boxed{⑦}$ $(k\geqq 0)$ である．

（2）　$n=3$ のケースを考える

硬貨を k 回続いて投げるとき，3回続けては表が出ない確率を r_k とすれば，$n=2$ のケースと同様に考えて，r_k に関する漸化式

$$r_k=\boxed{⑧}\,r_{k-1}+\boxed{⑨}\,r_{k-2}+\boxed{⑩}\,r_{k-3}\qquad(k\geqq 3)$$

が成立する．以下，初めて3回続けて表が出るまでに投げた回数を表す確率変数 X_3 の平均値 $E(X_3)$ を求める．まず，X_3 は離散的確率変数であることから，次式が成立する．

$$E(X_3)=\sum_{l=1}^{\infty} l\cdot P(X_3=l),$$

$$r_k=\sum_{l=k+1}^{\infty} P(X_3=l)$$

したがって，$E(X_3)$ は r_k を用いて次のように $\boxed{⑪}$ と表すことができる．

ここで $p=\dfrac{1}{3}$ のとき，$E(X_3)=\boxed{⑫}$ である．

［解答］　（1）　硬貨を k 回続けて投げるとき，

2回続けては表が出ない確率 q_k

$=$ 初めて2回続けて表が出るまでに投げた回数 $X_2>k$ となる確率

$=\underbrace{P(X_2>k)}_{①}$.

$k\geqq 2$ のとき，

事象 $X_2>k$

$\Longleftrightarrow$（1回目に $\underbrace{\boxed{裏}}_{②}$ が出て，2回目から k 回目までの $k-1$ 回のうちに2回続けては表が出ない）

$\bigcup_{排反}$（1回目に $\underbrace{\boxed{表}}_{③}$，2回目に $\underbrace{\boxed{裏}}_{④}$ が出て，3回目から k 回目までの $k-2$ 回のうちに2回続けては表が出ない）

となるので

$$q_k=\underbrace{(1-p)}_{⑤}q_{k-1}+\underbrace{p(1-p)}_{⑥}q_{k-2}\qquad(k\geqq 2).$$

ここで $p=\dfrac{2}{3}$ とすれば

$$q_k=\frac{1}{3}q_{k-1}+\frac{2}{9}q_{k-2}$$

C1

で題意より $q_0=q_1=1$ で，特性方程式 $x^2=\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}$ の解は $\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}$ となるので

$$q_k=C\left(\frac{2}{3}\right)^k+D\left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

とおいて解いて

$$q_k=\underset{⑦}{\underline{2\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}}}\qquad (k\geqq 0).$$

（2） (1)と同様に

事象 $X_3>k$

$\Longleftrightarrow$(1回目に$\boxed{\text{裏}}$が出て，2回目から k 回目までの $k-1$ 回のうちに3回続けては表が出ない)

$\cup$(1回目に$\boxed{\text{表}}$，2回目に$\boxed{\text{裏}}$が出て，3回目から k 回目までの $k-2$ 回のうちに3回続けては表が出ない)

$\cup$(1回目に$\boxed{\text{表}}$，2回目に$\boxed{\text{表}}$，3回目に$\boxed{\text{裏}}$が出て，4回目から k 回目までの $k-3$ 回のうちに3回続けては表が出ない)

これより，

$$\begin{aligned}r_k&=P(X_3>k)\\&=\underset{⑧}{\underline{(1-p)}}r_{k-1}+\underset{⑨}{\underline{p(1-p)}}r_{k-2}+\underset{⑩}{\underline{p^2(1-p)}}r_{k-3}\\&\qquad\qquad (k\geqq 3)\qquad\cdots(*)\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}E(X_3)&=\sum_{l=1}^{\infty}lP(X_3=l)\\&=\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{l-1}\right)P(X_3=l)\\&=\sum_{0\leqq k\leqq l-1<\infty}P(X_3=l)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=k+1}^{\infty}P(X_3=l)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}P(X_3\geqq k+1)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}P(X_3>k)\\&=\underset{⑪}{\underline{\sum_{k=0}^{\infty}r_k}}\end{aligned}$$

ここで $r_0=r_1=r_2=1$ と(*)より

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{\infty}r_k=(1-p)&\sum_{k=3}^{\infty}r_{k-1}\\&+p(1-p)\sum_{k=3}^{\infty}r_{k-2}+p^2(1-p)\sum_{k=3}^{\infty}r_{k-3}\end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned}&E(X_3)-1-1-1\\&\quad=(1-p)(E(X_3)-1-1)\\&\qquad+p(1-p)(E(X_3)-1)+p^2(1-p)E(X_3).\end{aligned}$$

これを整理して，

$$p^3E(X_3)=3-2(1-p)-p(1-p)=1+p+p^2$$

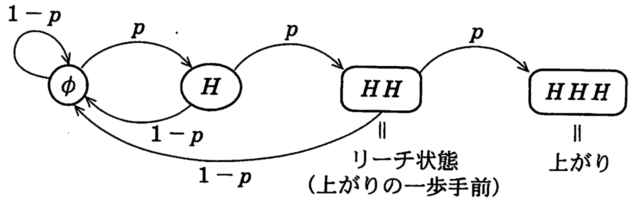
$$\therefore\quad E(X_3)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}.$$

$p=\frac{1}{3}$ を代入して

$$E(X_3)=27+9+3=\underset{⑫}{\underline{39}}.$$

□

［解説］ いわゆるパターンに関する問題である．大学入試でときどき取り上げられているし，2011年5月号の岩沢宏和さんの記事([5]参照)にも解説がある．また筆者も2006年7月号の連載「ランダムウォーク」第13回でこの話題を取り上げた．本問は漸化式としっぽ確率(tail probability)と期待値の関係を用いて $E(X_3)$ を求めることが面白いと思われる．ここでは，筆者が「ランダムウォーク」で取り上げた方法(再生性)を用いて解いてみよう([2]，[4]参照)．



最初から HHH (連続して表が3回出る)までにかかる回数 $=X_{HHH}$

H (表が1回出た状態)から HHH が出るまでにかかる回数 $=X_{HHH}^{H}$

HH (表が2回出た状態)から HHH が出るまでにかかる回数 $=X_{HHH}^{HH}$

とおくと，

$$X_{HHH}=\begin{cases}1+X_{HH}^{H} & \text{最初に} H\text{(表)[確率} p\text{]}\\ 1+X'_{HHH} & \text{最初に} T\text{(裏)[確率} 1-p\text{]}\end{cases}$$

ここで，$X_{HHH}\sim X'_{HHH}$ (X_{HHH} と X'_{HHH} は同分布)．よ

(2

って，

$$\begin{aligned}E(X_{HHH}) &= p(1+E(X^{H}_{HHH}))+(1-p)(1+E(X'_{HHH}))\\ &= 1+pE(X^{H}_{HHH})+(1-p)E(X'_{HHH})\\ &= 1+pE(X^{H}_{HHH})+(1-p)E(X_{HHH}).\end{aligned}$$

同様に，

$$X^{H}_{HH}=\begin{cases}1+X^{HH}_{HHH} & (\text{確率 } p)\\ 1+X''_{HHH} & (\text{確率 } 1-p)\end{cases}$$

$$X^{HH}_{HHH}=\begin{cases}1 & (\text{確率 } p)\\ 1+X'''_{HHH} & (\text{確率 } 1-p)\end{cases}$$

より，

$$E(X^{H}_{HH}) = 1+pE(X^{HH}_{HHH})+(1-p)E(X_{HHH}),$$
$$E(X^{HH}_{HHH}) = 1+(1-p)E(X_{HHH}).$$

ここで，

$$E(X_{HHH})=x,\quad E(X^{H}_{HH})=y,$$
$$E(X^{HH}_{HHH})=z$$

とおくと，

$$x=1+py+(1-p)x,\quad y=1+pz+(1-p)x$$
$$z=1+(1-p)x$$

より，

$$\begin{aligned}x &= 1+p(1+pz+(1-p)x)+(1-p)x\\ &= 1+p+p^2(1+(1-p)x)+p(1-p)x+(1-p)x\end{aligned}$$

から，$p^3x=1+p+p^2$ となり，

$$x=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}$$

となる．

また，連載「ランダムウォーク」でも述べたが，マルチンゲール的な考えを用いると，次のようにして求めることができる．

1円払って，表(H)が出たら $\frac{1}{p}$ 円もらう賭けを考えると，

$$-1+\frac{1}{p}\times p=-1+1=0$$

となり，これは公平な賭けである．この硬貨投げに毎回この賭けを続けていくのだが，表が出たら帰ってきたお金 $\frac{1}{p}$ 円をそのまま次の賭けに通常の賭け金1円に加えてつぎ込み，さらに表が出たら帰ってきたお金 $\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}$ 円を通常の賭け金1円に加えてつぎ込み，表が3回連続して出たその時点で賭けを止めるとする．

表1

T	T	H	T	T	H	H	T	H	H	H
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
		$\frac{1}{p}\to$	0		$\frac{1}{p}\to$	$\frac{1}{p^2}\to$	0	$\frac{1}{p}\to$	$\frac{1}{p^2}\to$	$\frac{1}{p^3}$
						$\frac{1}{p}\to$	0		$\frac{1}{p}\to$	$\frac{1}{p^2}$
										$\frac{1}{p}$

すると例えば表1のように出たら，戻ってくるお金は

$$-X_{HHH}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}$$

となり，これはいつでも成立している．公平な賭けにどのように賭け続けていっても公平であり，したがって

$$E\left(-X_{HHH}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}\right)=0$$

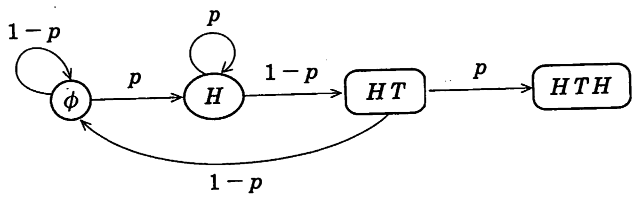
より，

$$E(X_{HHH})=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}.$$

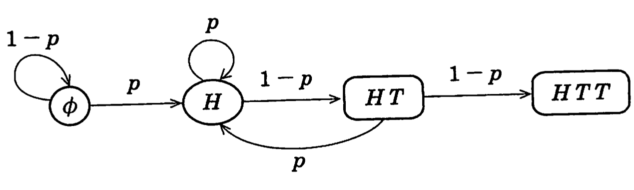
(ここの厳密な議論には Optional Stopping Theorem ([2] を参照)が必要で，例えば $E(X_{HHH})<+\infty$ の証明が本当は必要となるが，その証明は難しくない)

同様な考えで

$$E(X_{HTH})=\frac{1}{p^2(1-p)}+\frac{1}{p},$$



$$E(X_{HTT})=\frac{1}{p(1-p)^2},$$



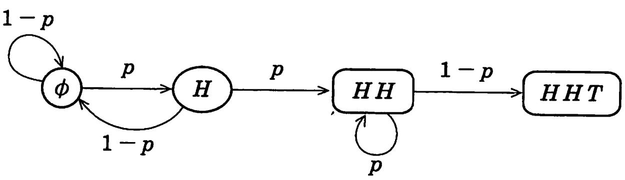
(3)

表 2

T	T	H	T	T	H	H	T	T	H	T	H
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
		$\frac{1}{p}\to$	$\frac{1}{p(1-p)}\to$	0	$\frac{1}{p}\to$	0			$\frac{1}{p}\to$	$\frac{1}{p(1-p)}\to$	$\frac{1}{p^2(1-p)}$
						$\frac{1}{p}\to$	$\frac{1}{p(1-p)}\to$	0			
			$\uparrow$								
											$\frac{1}{p}$

H が出て，もらった $\frac{1}{p}$ を今度は T に賭ける．
また同じく H には 1 を賭ける．

$$E(X_{HHT})=\frac{1}{p^2(1-p)},$$



のようにできるので確めて欲しい．

このように $p=\frac{1}{2}$ のとき，X_{HHT}, X_{HTT} が平均的に早い理由は，例えば X_{HHT} だといったんリーチ状態 HH になると，上がりかリーチに戻るしかなく，X_{HHH} のように T が出てリセットされてしまうことがないからである．

X_{HTH} の場合，例えば表 2 となり，いつでも戻ってくるお金は

$$-X_{HTH}+\frac{1}{p^2(1-p)}+\frac{1}{p}$$

となることがわかり，これは公平な賭けなので

$$E(X_{HTH})=\frac{1}{p^2(1-p)}+\frac{1}{p}$$

となる．

もっと簡単な例でいえば，独立に成功(成功確率 p)と失敗(失敗確率 $1-p$)しかないベルヌーイ試行を繰り返したとき，初めて X 回目で成功すれば $X\sim F_S(p)$(パラメータ p のファーストサクセス分布)で，つまり

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}\qquad(k=1,2,\cdots)$$

で

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kP(X=k)$$
$$=p\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}$$
$$=p\frac{1}{(1-(1-p))^2}=\frac{1}{p}$$

である．毎回 1 円ずつ払い，成功すれば $\frac{1}{p}$ 円もらう賭けを考えれば，$\frac{1}{p}\times p=1$ となり，この賭けは公平である．すると，最初に成功したときに賭けを止めるとすれば，X 円払って $\frac{1}{p}$ 円戻ってくるので，この賭けは公平であることにより $E\left(-X+\frac{1}{p}\right)=0$ よって $E(X)=\frac{1}{p}$ と，上のように計算しなくとも $F_S(p)$ の期待値が求められる．同様に，n 回のベルヌーイ試行における成功回数 Y は，$Y\sim B(n,p)$ で $E(Y)=np$ だが，これも毎回 1 円払って成功したときだけ $\frac{1}{p}$ 円もらえば，この賭けは

$$\frac{1}{p}\times p+0\times(1-p)=1$$

で公平であり，n 円払って $\frac{Y}{p}$ 円戻ってくるので $\frac{Y}{p}-n$ は公平，つまり，$E\left(\frac{Y}{p}-n\right)=0$ よって $E(Y)=np$ となる．このような例を通じて「確率論」の「直観力」を味わっていただければ幸いである．

また本問はもう 1 つ確率論の重要なテクニック，しっぽ確率と期待値の関係を用いている(しっぽ定理)．X を非負整数に値をとる確率変数とすると

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geqq k)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X>k).$$

証明はいろいろあるが，例えば

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geqq k)$$
$$=P(X\geqq 1)+P(X\geqq 2)+P(X\geqq 3)$$
$$\vdots$$
$$=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+\cdots$$

C4

$$+P(X=2)+P(X=3)+\cdots$$
$$+P(X=3)+\cdots$$
$$=P(X=1)+2P(X=2)+3P(X=3)+\cdots$$
$$=\sum_{l=1}^{\infty}lP(X=l)=E(X).$$

連続確率変数なら $P(X>0)=1$ として

$$E(X)=\int_0^{+\infty}P(X>t)dt$$

となる.

証明

$$\int_0^{\infty}P(X>t)dt=\int_0^{\infty}\left(\int_t^{\infty}f_X(u)du\right)dt$$
$$=\int_0^{\infty}du\int_0^{u}f_X(u)dt$$
$$=\int_0^{+\infty}uf_X(u)du=E(X). \qquad \square$$

また負の値をとる場合でも $X=X_+-X_-$. ここで $X_+=\max(X,0)$, $X_-=\max(-X,0)$ として

$$E(X_+)=\int_0^{+\infty}P(X_+>t)dt$$
$$=\int_0^{+\infty}P(X>t)dt,$$
$$E(X_-)=\int_0^{+\infty}P(X_->t)dt$$
$$=\int_0^{+\infty}P(\max(-X,0)>t)dt$$
$$=\int_0^{+\infty}P(-X>t)dt$$
$$=\int_0^{+\infty}P(X<-t)dt$$

と $E(X)=E(X_+)-E(X_-)$ において $E(X_+),E(X_-)$ を別々に計算すれば良い.

例えば $X\sim F_s(p)$ だと

$$P(X\geqq k)=\sum_{l=k}^{\infty}P(X=l)$$
$$=\sum_{l=k}^{\infty}p(1-p)^{l-1}$$
$$=\frac{p(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)}$$
$$=(1-p)^{k-1}\qquad(k\geqq 1)$$

となり

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geqq k)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}$$
$$=\frac{1}{1-(1-p)}=\frac{1}{p}.$$

$X\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$(連続確率変数 X の密度関数 $f_X(x)$ は $f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}\ (x>0)$)なら

$$P(X\geqq t)=\int_t^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=[-e^{-\lambda x}]_t^{\infty}=e^{-\lambda t}$$

よって,

$$E(X)=\int_0^{+\infty}P(X\geqq t)dt$$
$$=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}dt$$
$$=\left[\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

となる([1]参照). $X\sim \mathrm{DU}\{a,\cdots,b\}$, つまり

$$P(X=k)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a+1} & (k=a,\cdots,b)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

だと, 明らかに $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$ であるが, (なぜなら,

$$E(X)=\sum_{k=a}^{b}k\frac{1}{b-a+1}$$
$$=\frac{1}{b-a+1}\times\frac{a+b}{2}(b-a+1)$$
$$=\frac{a+b}{2}$$

となる) このような分布でしっぽ定理を使うときは, a,b が自然数のときは $P(X\geqq k)$ が $k=1,2,\cdots,a$ で 1, $k\geqq b+1$ で 0 になることに気をつけなければならない.

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geqq k)$$
$$=\sum_{k=1}^{a}P(X\geqq k)+\sum_{k=a+1}^{b}P(X\geqq k)$$
$$=\sum_{k=1}^{a}1+\sum_{k=a+1}^{b}\frac{b-k+1}{b-a+1}$$
$$=a+\frac{1}{b-a+1}\sum_{l=1}^{b-a}l$$
$$=a+\frac{1}{b-a+1}\frac{(b-a)(b-a+1)}{2}$$
$$=\frac{a+b}{2}$$

となるのである. 本問でも $r_0=r_1=r_2=1$ であることに気づかないと, しっぽ定理が正確に使えないので

C5

ある．

次に確率の小問を取り上げる．

◉── **平成19年度　問題1(10)**

箱の中に 1, 2, 3, …, 11 なる番号のついた札が 1 枚ずつ，合計 11 枚入っている．この箱から非復元抽出によって無作為に 3 枚の札を取り出したときに得られる番号の和の分散は $\boxed{}$ である．

[解答]　$11=N$ としてまず一般的に考える．3 枚の札の番号をそれぞれ X_1, X_2, X_3 とすると，くじ引きの公平性より X_1, X_2, X_3 は同分布で(独立でない)，

$$P(X_i=k)=\frac{1}{N}\qquad(1\leqq k\leqq N)$$

である．したがって

$$E(X_i)=\sum_{k=1}^{N}kP(X_i=k)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}k=\frac{N+1}{2},$$

$$E(X_i^2)=\sum_{k=1}^{N}k^2P(X_i=k)=\frac{(N+1)(2N+1)}{6}$$

これらより，

$$\begin{aligned}V(X_i)&=E(X_i^2)-(E(X_i))^2\\&=\frac{(N+1)(2N+1)}{6}-\left(\frac{N+1}{2}\right)^2\\&=\frac{(N+1)(N-1)}{12}.\end{aligned}$$

また，

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)$$

で

$$P(X_1=k\cap X_2=l)=\frac{1}{N(N-1)}$$

$$(1\leqq k\neq l\leqq N)$$

(非復元抽出)より

$$\begin{aligned}&E(X_1X_2)\\&\quad=\frac{1}{N(N-1)}\sum_{1\leq k\neq l\leq N}kl\\&\quad=\frac{1}{N(N-1)}\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}kl-\sum_{k=1}^{N}k^2\right)\\&\quad=\frac{1}{N(N-1)}\\&\qquad\times\left(\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2-\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\right)\\&\quad=\frac{(N+1)(3N+2)}{12}\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_1,X_2)&=\frac{(N+1)(3N+2)}{12}-\left(\frac{N+1}{2}\right)^2\\&=-\frac{N+1}{12}\end{aligned}$$

である．以上により，

$$\begin{aligned}&V(X_1+X_2+X_3)\\&\quad=V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)\\&\qquad+2(\mathrm{Cov}(X_1,X_2)+\mathrm{Cov}(X_2,X_3)+\mathrm{Cov}(X_3,X_1))\\&\quad=3V(X_1)+6\,\mathrm{Cov}(X_1,X_2)\\&\quad=3\frac{(N+1)(N-1)}{12}+6\frac{-(N+1)}{12}\end{aligned}$$

C6

$$= \frac{(N+1)(N-3)}{4}.$$

本問では $N=11$ なので $\frac{12\times 8}{4}=24.$ □

［解説］ 復元抽出なら $X_i \sim \mathrm{DU}\{1,2,\cdots,N\}$，つまり $(X_i=k)=\frac{1}{N}\ (1 \leqq k \leqq N)$ で，

$$E(X_i)=\frac{N+1}{2}, \qquad V(X_i)=\frac{(N+1)(N-1)}{12}$$

り

$$V(X_1+X_2+X_3)=3V(X_1)=\frac{(N+1)(N-1)}{4}$$

なるが，本問は非復元抽出により X_1, X_2, X_3 は同分ではあるが独立ではないので，上の解答のように和分散公式で共分散を考えなければならないのである．

また，この復元抽出による分散に有限母集団補正

$$\frac{N-n}{N-1}=\frac{N-3}{N-1}$$

かけても出る．（参考文献[1]問題 $\boxed{28}$ p. 60，[3] p. 85, 91 に類題あり）

最後にモデリングからブラウン運動に関する計算問題をとり上げる．

— 平成22年度　問題1（11）

標準ブラウン運動 $\{X_t\}_{t\geqq 0}$ に対して X_1+X_2 は平均 $\boxed{①}$，分散 $\boxed{②}$ の正規分布に従い，

$$E(X_1 | X_1+X_2>0)=\boxed{③}$$

である．

［解 答］ $X_1 \sim \mathrm{N}(0,1), X_2 \sim \mathrm{N}(0,2)$ で $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)=1$ である．したがって

$$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=0+0=0,$$
$$V(X_1+X_2)=V(X_1)+2\,\mathrm{Cov}(X_1,X_2)+V(X_2)$$
$$=1+2\times 1+2=5.$$

よって，X_1+X_2 は平均 $\underset{①}{0}$，分散 $\underset{②}{5}$ の正規分布に従う．

ブラウン運動の独立増分性より $X_1=X, X_2=X+Y$ ($X \sim Y \sim \mathrm{N}(0,1)$ で独立）とおけるので

$$E(X_1 | X_1+X_2>0)=\frac{E(X, 2X+Y>0)}{P(2X+Y>0)}.$$

ここで

$$P(2X+Y>0)=P(\mathrm{N}(0,5)>0)=\frac{1}{2}.$$

また，

$$E(X, 2X+Y>0)$$
$$=\iint_{2x+y>0} x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy\int_{-\frac{1}{2}y}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy\left[-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_{-\frac{1}{2}y}^{+\infty}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{8}y^2}dy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{5}{8}y^2}dy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{5}{8}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5\pi}}.$$

（ガウスの公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-tx^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{t}} \qquad (t>0)$$

による） よって，

$$E(X | 2X+Y>0)=\underset{③}{\underline{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5\pi}}}}.$$ □

［解説］ $\{X_t\}_{t\geqq 0}$ が標準ブラウン運動であるとは，t は非負実数の値をとり，$X_0=0$ で，

- 周辺分布は正規分布，つまり $X_t \sim \mathrm{N}(0,t)$
- 独立増分性：（2時点で説明すると）$0 \leqq s \leqq t$ に対して X_s と X_t-X_s は独立
- 定常増分性：$0 \leqq s < t$ に対し，
  $X_t-X_s \sim \mathrm{N}(0, t-s)$
- パスは連続：確率1で $t \to X_t$ は連続

を満たす確率過程（パラメータ付の確率変数）である．

最大値，最小値，局所時間，滞在時間，初到達時刻などとその組み合わせによって，何千ものブラウン運動とその関連分布に関する公式が知られている数学的対象である．アクチュアリー試験においては上の定義から直接的に導かれるもの，つまり正規分布との関連，独立増分性に関するものしか出題されないと思われる．

C7

- $E(X_t) = E(\mathrm{N}(0, t)) = 0$
- $V(X_t) = V(\mathrm{N}(0, t)) = t$
- $0 \leqq s < t$ として

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(X_s, X_t) \\
&\quad = \mathrm{Cov}(X_s, X_s) + \mathrm{Cov}(X_s, X_t - X_s) \\
&\quad = V(X_s) + 0 = s
\end{aligned}
$$

を利用し，$X_1 + X_2$ は

$$
\begin{aligned}
X_1 + X_2 - X_1 + X_1 &= 2X_1 + X_2 - X_1 \\
&= 2X + Y,
\end{aligned}
$$

$$X \sim Y \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

で独立として独立増分性を用いて問題を解いた．

筆者は文献[3]p. 106-107 において

$$E(X_1 | X_2 + aX_1 > 0) = \frac{2(a+1)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{(a+1)^2+1}}$$

の計算を解説しているので参考にされると良いであろう．

最後に，実際の試験問題は多肢選択式設問であるが，ここではスペースの関係で選択肢は掲載しなかった．

参考文献

[1] 藤田岳彦，『弱点克服　大学生の確率・統計』，東京図書

[2] 藤田岳彦，『ランダムウォークと確率解析』，日本評論社

[3] 藤田岳彦，『確率・統計・モデリング問題集』，日本アクチュアリー会

[4] 藤田岳彦，「ランダムウォーク——再生性と確率・期待値の問題」，『数学セミナー』2005 年 7 月号

[5] 岩沢宏和，「確率パズルの迷宮——サイコロ遊びにご用心」，『数学セミナー』2011 年 5 月号

［ふじた たかひこ］

C8